Mathematikübung 1
(nach Dr. R. Storm)

Aufgabe

---

1. Vereinfachen Sie:

. $$\frac{\left(2x^3y^{-2}\right)^3}{\left(4x^2y\right)^2} \div \frac{\left(4x^3y^{-2}\right)^4}{\left(6x^{-2}y^2\right)^3}$$

b. $$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{n+1}$$

c. $$\frac{(9a+3b)^2}{9b^2-81a^2}$$

2. Welche reellen Zahlen x erfüllen die Ungleichung

. $$\frac{13-2x}{2} \geq x+1$$

b. $$|x+1| \geq 4$$

c. $$|x-1| < 2$$

d. $$\left|\frac{x-a}{b}\right| < c$$

$a > 0, b > 0, c > 0$

3. Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung

. $$\sqrt{2x+8} + \sqrt{3x+7} = \sqrt{x+11}$$

b. $$\frac{ax+b}{ab-b^2} - \frac{a-bx}{ab+b^2} = 2\frac{ax+b}{a^2-b^2}$$

erfüllt ?

4. Zählen Sie die Elemente der folgenden Menge auf:

M = $\{x \mid x \in G$ und $2x - 5 > -3$ und $x - 3 \leq 4\}$ (G ist die Menge der ganzen Zahlen.)

Letzte Änderung: 15.04.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Mathematikübung 1

Lösung

---

1 a) $$\frac{\left(2x^3y^{-2}\right)^3}{\left(4x^2y\right)^2} \div \frac{\left(4x^3y^{-2}\right)^4}{\left(6x^{-2}y^2\right)^3}$$

- Division durch einen Bruch entspricht Multiplikation mit seinem Kehrwert.
- Beim Übergang von Potenzen aus dem Nenner in den Zähler wechseln die Vorzeichen der Exponenten

$$= 2^3 \cdot x^{3*3} \cdot y^{-2*3} \cdot 4^{-2} \cdot x^{-2*2} \cdot y^{-2} \cdot 6^3 \cdot x^{-2*3} \cdot y^{2*3} \cdot 4^{-4} \cdot x^{-3*4} \cdot y^{2*4}$$

$$= 2^3 \cdot 4^{-2} \cdot 6^3 \cdot 4^{-4} \cdot x^9 \cdot x^{-4} \cdot x^{-6} \cdot x^{-12} \cdot y^{-6} \cdot y^{-2} \cdot y^6 \cdot y^8$$

$$= 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{-8} \cdot x^{-13} \cdot y^6$$

$$= 2^{-6} \cdot 3^3 \cdot x^{-13} \cdot y^6$$

$$= \frac{27y^6}{64x^{13}}$$

1 b) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{n+1}$$

$$= a^n \cdot b^{-n} \cdot b^{n-1} \cdot c^{-(n-1)} \cdot c^{n+1} \cdot a^{-(n+1)}$$

$$= a^n \cdot a^{-(n+1)} \cdot b^{-n} \cdot b^{n-1} \cdot c^{-(n-1)} \cdot c^{n+1}$$

$$= a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^2$$

$$= \frac{c^2}{a \cdot b}$$

1 c) $$\frac{\left(9a + 3b\right)^2}{9b^2 - 81a^2}$$

Hier ist zu erkennen, daß sich der Nenner nach dem 3. binomischen Satz zerlegen läßt.

$$= \frac{(9a + 3b)^2}{(-9a + 3b)(9a + 3b)}$$

$$= \frac{9a + 3b}{-9a + 3b}$$

$$= \frac{3a + b}{-3a + b}$$

binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2 a) $\frac{13 - 2x}{2} \geq x + 1$

$$13 - 2x \geq 2x + 2$$

$$13 \geq 4x + 2$$

$$11 \geq 4x$$

$$\frac{11}{4} \geq x$$

2 b) $|x + 1| \geq 4$

Zerlegen in zwei Ungleichungen

$x + 1 \geq 4$ für $x + 1 > 0$

$-(x + 1) \geq 4$ für $x + 1 < 0$

$x \geq 3$ oder $x \leq -5$

(Ungleichung wechselt Seite bei Multiplikation mit –1)

2 c) $|x-1|<2$

für $x-1>0$ ist

$x-1<2$

$x<3$

für $x-1<0$ ist

$-(x-1)<2$

$x-1>-2$

$x>-1$

$x<3$ und $x>-1$ oder: $-1<x<3$

2 d) $\left|\dfrac{x-a}{b}\right|<c$ a > 0, b > 0, c > 0

$x-a>0$

$\dfrac{x-a}{b}<c$

$x-a<b\cdot c$

$x<b\cdot c+a$

$x-a<0$

$\dfrac{-(x-a)}{b}<c$

$-(x-a)<b\cdot c$

$-x<b\cdot c-a$

$x>-b\cdot c+a$

$a-b\cdot c<x<a+b\cdot c$

3 a) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{x+11}$

$$2x+8+2\cdot\sqrt{2x+8}\cdot\sqrt{3x+7}+3x+7=x+11$$

$$4x+4+2\cdot\sqrt{2x+8}\cdot\sqrt{3x+7}=0$$

$$2x+2=-\sqrt{2x+8}\cdot\sqrt{3x+7}$$

$$4x^2+8x+4=(2x+8)\cdot(3x+7)$$

$$4x^2+8x+4=6x^2+24x+14x+56$$

$$0=2x^2+30x+52$$

$$0=x^2+15x+26$$

Quadratische Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

Lösung durch quadratische Ergänzung

$$x_{1;2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_{1;2}=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2-26}$$

$$x_{1;2}=-7{,}5\pm\sqrt{30{,}25}$$

$$x_{1;2}=-7{,}5\pm5{,}5$$

$$x_1=-2$$

$$x_2=-13$$

3 b) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=2\,\frac{ax+b}{a^2-b^2}$

$$\frac{(a+b)\cdot(ax+b)-(a-b)\cdot(a-bx)}{b\cdot(a+b)\cdot(a-b)}=2\cdot\frac{ax+b}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2\cdot x+a\cdot b\cdot x+a\cdot b+b^2-\left(a^2-a\cdot b-a\cdot b\cdot x+b^2\cdot x\right)}{b\cdot\left(a^2-b^2\right)}=2\,\frac{ax+b}{a^2-b^2}$$

$$a^2\cdot x+2\cdot a\cdot b\cdot x+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2-b^2\cdot x=2\cdot b\cdot(ax+b)$$

$$a^2\cdot x+2\cdot a\cdot b\cdot x+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2-b^2\cdot x=2\cdot a\cdot b\cdot x+2\cdot b^2$$

$$a^2\cdot x+2\cdot a\cdot b-a^2-b^2-b^2\cdot x=0$$

$$x\cdot\left(a^2-b^2\right)=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$

$$x=\frac{a-b}{a+b}$$

4) M ={x | $x \in G$ und $2x-5>-3$ und $x-3\le 4$ } (G ist die Menge der ganzen Zahlen)

$x>1$ und $x\le 7$

$M=\{2,3,4,5,6,7\}$

Letzte Änderung: 10.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*