

Biometrieübung 15

Vollständig randomisierte Anlage

Aufgabe

1. Phosphorbestimmung

In einem Labor sind vier Laboranten A, B, C und D angestellt. Der Laborleiter vermutet, daß die 4 Angestellten bei einem Verfahren der Phosphorbestimmung unterschiedlich sorgfältig arbeiten. Dies soll nun mit Hilfe eines Versuches geklärt werden. Dazu entnimmt der Laborleiter aus ein und demselben Heuhaufen zwanzig vergleichbare Heuproben, an denen der Phosphorgehalt bestimmt werden soll.

Heuprobe Nr.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Jeder dieser 20 Heuproben (Versuchseinheiten) wird zufällig einem Laborant (Behandlung) zugeteilt, so daß jeder Laborant fünf Heuproben untersucht.

B	C	B	A	A	D	C	D	B	C
A	D	D	B	C	B	A	D	A	C

d.h. Laborant A untersucht Probe 4, 5, 11, 17 und 19 usw.

Die Ergebnisse der Phosphorgehaltsbestimmung (in mg/g) lassen sich folgendermaßen zusammenstellen.

Laborant	A	B	C	D
	34	37	34	36
	36	36	37	34
	34	35	35	37
	35	37	37	34
	34	37	36	35
Summe	173	182	179	176

$$\Sigma\Sigma x = 710$$

$$\Sigma\Sigma x^2 = 25234$$

Ergänzen Sie die unten stehende Varianztabelle, formulieren Sie die Nullhypothese zum Test, führen Sie den entsprechenden F-Test durch und überprüfen Sie die Nullhypothese ($F_{Tab} = 3,24$).

Variationsursache	SQ	FG	MQ	F
Gesamt				
Behandlung				

Fehler				
--------	--	--	--	--

Letzte Änderung: 01.03.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 15

Randomisierte Anlage

Lösung

1. Phosphorbestimmung

Die Ergebnisse der Phosphorgehaltsbestimmung (in mg/g) lassen sich folgendermaßen zusammenstellen.

Laborant:	A	B	C	D
	34	37	34	36
	36	36	37	34
	34	35	35	37
	35	37	37	34
	34	37	36	35
Σ	173	182	179	176
$\Sigma \Sigma x = 710$		$\Sigma \Sigma x^2 = 25234$		

$$(\Sigma \Sigma x)^2 / n = 710^2 / 20 = 25205$$

Nach den Rechenformeln für die Varianzanalyse ergibt sich:

$$SQ_{Ges} = 25234 - 25205 = 29$$

$$SQ_{Behandlung} = (173^2 + 182^2 + 179^2 + 176^2) / 5 - 25205 = 9$$

$$SQ_{Fehler} = 29 - 9 = 20$$

Streuungsursache	SQ	FG	MQ	F
Gesamt	29	19		
Behandlung	9	3	3,00	2,40
Fehler	20	16	1,25	

Zur Prüfung der Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ wird der berechnete F-Wert mit dem Tabellenwert verglichen:

$$F_{0,05(1),3,16} = 3,24$$

Da der berechnete Wert den tabellierten Wert nicht übersteigt, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Der Laborleiter kann seinen Angestellten nicht nachweisen, daß sie trotz gleicher Labormethode zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen.

Bei Ablehnung der Nullhypothese sind keine Aussagen darüber möglich, welche Behandlungen sich signifikant unterscheiden. zu diesem Zweck existieren einige multiple Testverfahren.

Letzte Änderung: 20.09.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 15

Randomisierte Anlage

Formeln

Vollständige randomisierte Anlage (Completely Randomized Design)

Die Behandlungen werden den ausgewählten, untereinander homogenen Versuchseinheiten vollkommen zufällig zugeordnet. Der Versuch beinhaltet einen Planfaktor (der sogenannte Prüffaktor)

Bei der Versuchsauswertung mittels Varianzanalyse wird die Gesamtstreuung SQ_{Ges} aufgeteilt in

SQ_{Beh} : Abweichung der Behandlungsmittel vom Gesamtmittel – Streuung zwischen den Behandlungen

SQ_{Fehler} : Abweichung der Einzelwerte von ihrem jeweiligen Behandlungsmittel – Streuung zwischen den Versuchseinheiten gleicher Behandlung

Der F-Wert ist der Quotient aus MQ_{Beh} (Varianz, die auf die Behandlungen zurückzuführen ist) und MQ_{Fehler} (Restvarianz).

Die Nullhypothese lautet: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ (d.h. die Wirkung der Behandlungen unterscheidet sich nicht signifikant).

Trifft die Nullhypothese zu, sind MQ_{Beh} und MQ_{Fehler} beide Schätzungen der Varianz einer Grundgesamtheit. Zeigt der F-Test, daß MQ_{Beh} signifikant größer ist als MQ_{Fehler} , kann die Nullhypothese für eine bestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit abgelehnt werden.

Bei der Varianzanalyse ebenfalls gebräuchliche Bezeichnungen:

$(SQ_I = SQ_{Beh} \quad SQ_Z = SQ_{Fehler} \quad SQ_T = SQ_{Ges})$

$(MQ_I = MQ_{Beh} \quad MQ_Z = MQ_{Fehler})$

Hypothesen:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$

$H_A: \mu_i \neq \mu$ (für bestimmte i)

Rechnung:

Streuungsart	SQ	Freiheits- grade FG	MQ

Zwischen den Behandlungen (Beh)	$SQ_{Beh} = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_g)^2$	$k - 1$	$MQ_{Beh} = \frac{SQ_{Beh}}{k - 1}$
Zwischen den Versuchseinheiten gleicher Behandlung (Fehler)	$SQ_{Fehler} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$n - k$	$MQ_{Fehler} = \frac{SQ_{Fehler}}{n - k}$
Gesamt (total)	$SQ_{Ges} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_g)^2$	$n - 1$	

n = Zahl der Versuchseinheiten
 k = Anzahl der Behandlungen

vereinfachte Rechenformeln:

$$SQ_{Ges} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{S_g^2}{n}$$

$$SQ_{Beh} = \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{n_i} - \frac{S_g^2}{n}$$

$$SQ_{Fehler} = SQ_{Ges} - SQ_{Beh}$$

Testgröße F

$$\hat{F} = \frac{MQ_{Beh}}{MQ_{Fehler}}$$

F-Wert aus Tabelle

[Tabelle der oberen Signifikanzschranken](#) der F-Verteilung für $\alpha = 0,05$

$$F_{FG_{Beh}; FG_{Fehler}; \alpha}$$

$$F_{k-1; n-k; \alpha}$$

Vergleich

Ist $\hat{F} > F_{k-1; n-k; \alpha}$ wird die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ abgelehnt. In diesem Fall sind

mindestens zwei μ_i voneinander verschieden, d.h. die Alternativhypothese $\mu_i \neq \mu$ für bestimmte i wird akzeptiert. Es ist keine Aussage möglich, welche Behandlungen sich signifikant unterscheiden. Zu diesem Zweck existieren multiple Testverfahren.

Vorteile der uneingeschränkten Zufallsauswahl:

- Anlage und Auswertung sind einfach
- Die Restvarianz SQ_{Fehler} hat ein Maximum an Freiheitsgraden (vergleiche mit den Freiheitsgraden für Blockanlage und Lateinische Quadrate).

Nachteile der uneingeschränkten Zufallsauswahl:

- Im o. g. Versuch werden 12 homogene Versuchseinheiten benötigt, d. h. daß schon bei einer Flächengröße von 0,1 ha / Versuchseinheit insgesamt 1,2 ha standörtlich homogene Versuchsfläche zur Verfügung stehen müssen. Werden wesentliche Restfaktoren nicht beachtet, wird SQ_{Fehler} sehr groß. Dadurch wird es immer unwahrscheinlicher, daß der F-Test auf Signifikanz der Behandlungen stößt, der Versuch verliert an Sensibilität.

Letzte Änderung: 08.07.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 15 Randomisierte Anlage

Obere Signifikanzschranken der F-Verteilung für $\alpha = 0,05$

FG₁ = Freiheitsgrade des Zählers (k-1)

FG₂ = Freiheitsgrade des Nenners (n-k)

	FG ₁																				
FG ₂	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	FG ₂
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	245,9	248,0	249,0	250,1	251,1	252,2	253,2	254,3	1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	2
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13	14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07	15
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	17
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92	18
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88	19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84	20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81	21
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78	22
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	23
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73	24
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	26
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	28
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	30
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	40

Biometrieübung 15 (Randomisierte Anlage) - Tabelle der F-Verteilung

60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39	60
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25	120
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	∞
FG₂	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	FG₂
FG₁																					

[zurück](#)

Letzte Änderung: 09.07.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)

