

Biometrieübung 12

Zufallsauswahl & Blockstichprobe

Aufgabe

Datensatz:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	106	118	188	77	165
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	130	141	112	106	94
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	194	106	224	59	141
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	100	159	124	218	200
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	147	88	100	153	124

Population I: 225 quadratischen Probeflächen von 0,1 ha; Volumen in m³/ha

1. Zufallsauswahl

Aus der Population I sollen 10 Probeflächen zufällig ausgewählt werden. Benutzen Sie dazu die [Zufallszahlentabelle](#).

Berechnen Sie folgende Maßzahlen für die Stichprobe:

- Mittelwert
- Standardabweichung
- Stichprobenfehler
- 95 % Vertrauensbereich
- Variationskoeffizient

- Wie groß müßte der Stichprobenumfang gewählt werden, um mit $\alpha = 0,05$ einen Fehler von ± 20 zu erhalten.

2. Blockstichprobe

Zerlegen Sie die Population I in 9 gleich große quadratische Blöcke und wählen Sie aus jedem Block 3 Probeflächen zufällig aus.

Berechnen Sie folgende Maßzahlen für die Stichprobe:

- Mittelwert
- Standardabweichung
- Stichprobenfehler

Zufallszahlen:

69843	63998	50034	05077	87100	33096	61642	06845	46806	02988
67031	27975	62092	31124	87270	01022	62283	99910	40602	73814
47819	55707	18974	64720	39379	61333	73187	87689	15371	77747
75060	86337	32348	08285	83397	63594	73709	12343	38127	69221
38258	54067	16478	53281	90969	29359	52159	75848	25676	86001
41337	96244	33870	57653	33160	84033	04476	80419	19050	15355
21770	20207	78339	92770	10798	65404	55849	14611	18125	29558
13159	54014	88843	45913	36690	49560	48472	61866	09058	77185
57767	49818	85351	54455	25274	40850	13598	63410	65862	51636
40108	19454	74801	46540	87402	98537	55979	87876	49324	28277
28987	01338	62693	25801	17314	66235	14044	45659	37273	80185
17640	66280	54406	38634	42924	79027	42239	48583	53874	20160
17127	26016	21668	24011	34585	83641	62249	66701	94826	11246
68421	84256	02184	67345	12867	86570	27451	20448	38284	09915
97701	37884	81461	46389	10264	20850	86091	23690	83455	29064
59503	95851	73072	63029	31537	48427	22493	23275	03215	97239
07641	63649	21436	45868	95137	63487	29882	87746	75491	14816
29305	24519	19356	20941	83385	45751	39394	12320	15866	44596

01653	52156	43904	04764	03823	62064	51877	07016	20902	94902
54667	07730	32957	95414	86856	30410	74735	91174	38002	34682
37859	37894	76233	09644	38867	34776	58632	45931	09776	27860
29780	86122	22570	76433	74440	99056	48946	23236	26637	22756
04516	71560	09361	51420	21382	14090	99092	05602	38984	78359
89374	61517	78610	47292	77566	93882	39200	02163	65349	09671
96390	64241	36444	40784	65386	75636	41987	79783	67550	27303

Letzte Änderung: 01.03.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 12

Zufallsauswahl & Blockstichprobe

Lösung

Inhalt

[Zufallsauswahl](#)

[Blockstichprobe](#)

Zufallsauswahl:

Zwei Möglichkeiten der zufälligen Auswahl der Flächen

1. Flächen durchnummerieren und dann Zufallszahlen bestimmen oder
2. da Population in Zeilen und Spalten gegliedert ist, benötigen wir 10 Zufallszahlenpaare.

Aus der Zufallszahlentabelle suchen wir die Wertepaare heraus, wobei wir z.B. links oben beginnen und nach unten fortschreitend jeweils die ersten beiden Ziffern der Zahlen benutzen. Sind wir unten angekommen, benutzen wir die nächsten beiden Ziffern der Zahlen wieder von oben nach unten. Ist die Zahl größer 15, wird sie verworfen.

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
13	07	260
01	04	112
03	06	106
15	10	94
12	12	141
08	02	277
06	13	118
08	06	171
02	13	12
15	15	124

Datensatz mit zufälliger Stichprobenauswahl

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	130	153	153	<u>112</u>	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	<u>12</u>	65	88
3	177	165	136	124	171	<u>106</u>	82	177	147	165	118	82	47	6	88
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-

5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	106	118	188	77	165
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	130	141	112	106	94
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	194	106	224	59	141
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	100	159	124	218	200
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	147	88	100	153	124

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1415}{10} = 141,5 \quad \text{m}^3/\text{ha}$$

Varianz

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$= \frac{255511 - \frac{(1415)^2}{10}}{9} = \frac{552885}{9} = 6143 \quad \text{m}^3/\text{ha}$$

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6143} = 78,38 \quad \text{m}^3/\text{ha}$$

Standardfehler, Stichprobenfehler ($s_{\bar{x}}$, S)

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} = \frac{78,38}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{1 - \frac{10}{225}}$$

$$= 24,78 \cdot 0,9555 = 23,68 \quad \text{m}^3/\text{ha}$$

Vertrauensbereich

$$\bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}}$$

$$\text{FG} = n - 1 = 9$$

$$t = 2,26 \text{ (aus t-Tabelle)}$$

95% - Vertrauensbereich

$$87,98 \leq \bar{x} \leq 195,02$$

Variationskoeffizient

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{78,38}{141,5} \cdot 100\% = 55,39\%$$

Erforderlicher Stichprobenumfang

$$A = t \cdot s_{\bar{x}} = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

$$t = 2$$

A = einseitige Weite des Konfidenzintervalls

$$n = \frac{1}{\frac{A^2}{t^2 \cdot s^2} + \frac{1}{N}} = \frac{1}{\frac{400}{2^2 \cdot 6143,2} + 0,0044} = 48$$

Blockbildung:

Die Population wird in 9 gleich große quadratische Blöcke zerlegt und aus jedem Block 3 Probeflächen zufällig ausgewählt. Die Auswahl der Probeflächen erfolgt mit Zufallszahlenpaaren im Wertebereich 1 bis 5 und zwar Block für Block.

Aus der Zufallszahlentabelle suchen wir die Wertepaare heraus, wobei wir z.B. links oben beginnen und nach unten fortschreitend jeweils die dritte Ziffer der Zahlen benutzen. Sind wir unten angelangt, benutzen wir die nächste Zufallszahlenspalte wieder jeweils die dritte Ziffer von oben nach unten. Ist die Zahl kleiner 1 und größer 5, wird sie verworfen. Kommt ein Zufallszahlenpaar doppelt in einem Block vor, wird das doppelte Paar verworfen.

69843	63998	50034	05077	87 <u>1</u> 00	33096	61642	06845	46806	02988
67031	27975	62092	31 <u>1</u> 24	87 <u>2</u> 70	01022	62283	99910	40602	73814
47819	55707	18974	64720	39 <u>3</u> 79	61333	73187	87689	15371	77747
75060	86 <u>3</u> 37	32 <u>3</u> 48	08 <u>2</u> 85	83 <u>3</u> 97	63594	73709	12343	38127	69221
38 <u>2</u> 58	54067	16 <u>4</u> 78	53 <u>2</u> 81	90969	29359	52159	75848	25676	86001
41 <u>3</u> 37	96 <u>2</u> 44	33870	57653	33 <u>1</u> 60	84033	04476	80419	19050	15355
21770	20 <u>2</u> 07	78 <u>3</u> 39	92770	10798	65404	55849	14611	18125	29558
13 <u>1</u> 59	54014	88843	45913	36690	49560	48472	61866	09058	77185
57767	49818	85 <u>3</u> 51	54 <u>4</u> 55	25 <u>2</u> 74	40850	13598	63410	65862	51636
40 <u>1</u> 08	19 <u>4</u> 54	74801	46 <u>5</u> 40	87 <u>4</u> 02	98537	55979	87876	49324	28277
28987	01 <u>3</u> 38	62693	25801	17 <u>3</u> 14	66235	14044	45659	37273	80185
17640	66 <u>2</u> 80	54 <u>4</u> 06	38634	42924	79027	42239	48583	53874	20160
17 <u>1</u> 27	26016	21668	24011	34585	83641	62249	66701	94826	11246
68 <u>4</u> 21	84 <u>2</u> 56	02 <u>1</u> 84	67 <u>3</u> 45	12867	86570	27451	20448	38284	09915
97701	37884	81 <u>4</u> 61	46 <u>3</u> 89	10264	20850	86091	23690	83455	29064
59 <u>5</u> 03	95851	73072	63029	31537	48427	22493	23275	03215	97239
07641	63649	21 <u>4</u> 36	45868	95137	63487	29882	87746	75491	14816
29 <u>3</u> 05	24 <u>5</u> 19	19 <u>3</u> 56	20941	83385	45751	39394	12320	15866	44596

01653	52 <u>1</u> 56	43904	04764	03823	62064	51877	07016	20902	94902
54667	07730	32957	95 <u>4</u> 14	86856	30410	74735	91174	38002	34682
37859	37894	76 <u>2</u> 33	09644	38867	34776	58632	45931	09776	27860
29780	86 <u>1</u> 22	22 <u>5</u> 70	76 <u>4</u> 33	74440	99056	48946	23236	26637	22756
04 <u>5</u> 16	71 <u>5</u> 60	09 <u>3</u> 61	51 <u>4</u> 20	21382	14090	99092	05602	38984	78359
89 <u>3</u> 74	61 <u>5</u> 17	78610	47 <u>2</u> 92	77566	93882	39200	02163	65349	09671
96 <u>3</u> 90	64 <u>2</u> 41	36 <u>4</u> 44	40784	65386	75636	41987	79783	67550	27303

Block 1

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
2	3	136
1	1	130
1	4	112

Block 2

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
5	3	112
3	3	177
2	2	194

Block3

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
4	3	35
2	2	-
5	1	147

Block 4

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
1	5	130
5	2	141
3	4	212

Block5

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
3	3	259
4	1	318
4	4	177

Block 6

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
3	2	277
5	3	300
4	1	177

Block 7

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
2	2	212
4	5	230
3	3	200

Block 8

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
4	4	294
4	2	294
1	2	330

Block 9

Zufallszahl Zeile	Zufallszahl Spalte	Volumen m ³ /ha
3	3	224
1	2	118
4	3	124

Datensatz mit 9 Blöcken und darin zufällig ausgewählten Stichproben

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	<u>130</u>	153	153	<u>112</u>	200		106	100	147	118	165		-	-	12	-	35
2	124	106	<u>136</u>	130	165		141	<u>194</u>	212	136	88		100	-	12	65	88

3	177	165	136	124	171		106	82	177	147	165		118	82	47	6	88
4	165	112	124	118	153		118	224	136	118	159		141	65	35	24	-
5	100	82	118	153	147		130	130	112	88	118		147	153	88	53	71
1	224	247	217	230	130		259	277	100	147	171		200	171	118	141	82
2	253	200	135	271	277		271	230	206	242	177		141	200	135	153	106
3	212	277	265	212	206		171	289	259	183	247		194	277	183	165	88
4	224	283	247	300	100		318	277	306	177	200		177	271	141	71	124
5	100	141	265	277	306		165	253	265	271	159		236	188	300	165	147
1	277	330	253	218	177		353	330	253	171	194		106	118	188	77	165
2	224	212	159	224	141		183	283	188	147	183		130	141	112	106	94
3	271	318	200	271	218		253	260	200	147	259		194	106	224	59	141
4	277	277	206	236	230		230	294	165	294	212		100	159	124	218	200
5	130	218	65	171	165		194	171	206	312	94		147	88	100	153	124

Block	Mittelwert m ³ /ha	Varianz m ³ /ha	Standardabweichung m ³ /ha
1	126,00	156,00	12,49
2	161,00	1873,00	43,29
3	60,67	5896,33	76,79
4	161,00	1981,00	44,51
5	251,33	5014,33	70,81
6	251,33	4276,33	65,39
7	214,00	228,00	15,10
8	306,00	432,00	20,78
9	155,33	3545,33	59,54

Gesamtmittel (\bar{x} , \bar{x}_{Block})

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k} = 187,41$$

Gesamtvarianz (s^2 oder s_{Block}^2)

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^k s_j^2}{k} = 2600,26$$

Gesamtstandardabweichung (s , s_{Block})

$$s = \sqrt{s^2} = 50,99$$

Stichprobenfehler, Standardfehler ($s_{\bar{x}}$, $s_{\bar{x} \text{ Block}}$)

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_{\text{Block}}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} = 8,63$$

Letzte Änderung: 02.06.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 12

Zufallsauswahl & Blockstichprobe

Formeln

Inhalt

[Quellenangabe und Beispielpopulation](#)

Zufallsstichprobe

[Formeln zur Zufallsstichprobe](#)

Blockstichprobe (Blockbildung)

[Formeln zur Blockstichprobe](#)

Stratifizierte Stichprobe (Stratifizierung)

[Formeln zur Stratifizierung](#)

Systematische Stichprobe

Klumpenstichprobe / Clusterstichprobe

Mehrstufige Stichprobe

[Zweistufige Stichprobe](#)

[Dreistufige Stichprobe](#)

Quellenangabe und Beispielpopulation

Die auf dieser Seite befindlichen Beispiele, Formeln und Beschreibungen wurden dem Buch "Forstinventur - Ein Leitfaden für Studium und Praxis" von FRITZ ZÖHRER (Verlag Paul Parey, Hamburg/Berlin 1980) entnommen. Für ein besseres Verständnis der unten aufgeführten Beispiele benutzen wir eine konkrete Übungspopulation. Die Population I besteht aus einem quadratischen Waldgebiet, das in $20 \times 20 = 400$ quadratische Probeflächen unterteilt ist, die sich ohne Zwischenräume aneinanderreihen. Jede Probefläche ist 0,1 ha groß, aber die Zahl in der Population gibt das Volumen in m^3/ha wieder. Die Bestockungsverhältnisse innerhalb dieses Gebietes sind ziemlich heterogen, wobei sich eine gewisse Zonierung zeigt.

Zufallsstichprobe

Die Zufallsstichprobe (engl. "random sample") gilt als Grundform aller Stichprobenverfahren. Die Kenntnis der Zusammenhänge ist daher wichtig für alle weiteren Stichprobenverfahren. Die Zufallsstichprobe kann bei Winkelzählproben, Probeflächen, SPP-Stichproben (Stichprobe mit programmierter Probebaumauswahl) und Satellitenstichproben ebenso verwendet werden wie bei Einzelbaumauswahl. Jede beliebig geartete und definierte Population kann durch Zufallsstichproben erfaßt werden. Dabei werden stets erwartungstreue, unverzerrte Werte erreicht.

Vor- und Nachteile

Die streng zufällige Auswahl gewährleistet in jedem Fall erwartungstreue Schätzungen der Populationsparameter. Auch die Standardfehler lassen sich unverzerrt abschätzen, was z.B. bei der systematischen Stichprobe nicht der Fall ist.

Diesem Vorteil steht aber die geringe Wirksamkeit der Zufallsstichprobe gegenüber: Um einen bestimmten Standardfehler zu erzielen, benötigt man einen relativ großen Stichprobenumfang, was wiederum einen hohen

Aufwand zur Folge hat. Als weiterer Nachteil für die Forstinventur ist auch noch die ungleichmäßige Erfassung der Waldflächen mit Stichproben anzuführen. Außerdem ist die Organisation und Kontrolle relativ aufwendig. Aus diesem Grund wurden Stichprobenverfahren entwickelt, die das Zufallsprinzip als allein steuerndes Element der Stichprobenauswahl einschränken.

Zufallsstichprobe von $n = 16$ Probeflächen in Population I

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35	-	18	-	-	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88	-	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	-	-	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	-	-	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	-	-	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	-	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	-	18	-	-	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	-	100	18	6	6	-	-	-	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	-	-	-	12	-	30	59	12	
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t

Formeln zur Zufallsstichprobe

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Varianz

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2}$$

Standardfehler

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

Vertrauensbereich

FG = n-1

$$\bar{x} \pm t \cdot s_{\bar{x}}$$

Variationskoeffizient

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Erforderlicher Stichprobenumfang

$$A = t \cdot s_{\bar{x}} = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

$$t = 2$$

A = einseitige Weite des Konfidenzintervalls

$$n = \frac{1}{\frac{A^2}{t^2 s^2} + \frac{1}{N}}$$

Blockstichprobe (Blockbildung)

Die Einschränkung des Zufallsprinzips kann z.B. in einer Blockbildung bestehen, indem die gesamte Waldfläche in gleich große Teile zerlegt wird, aus denen eine bestimmte Anzahl von Probeeinheiten zufällig ausgewählt wird. Da die Zufallsvariation innerhalb der Blöcke geringer ist als in der gesamten Population, kann dadurch der Inventuraufwand gegenüber der reinen Zufallsauswahl verringert werden.

Die Untergliederung des Inventurgebietes in Blöcke ist immer dann in Erwägung zu ziehen, wenn dadurch in sich homogenere Populationsteile entstehen, die aber auf dem Luftbild nicht durch deutliche Abgrenzung (Stratengrenzen) unterschieden werden können.

Die Wirksamkeit dieses Inventurdesigns ist um so größer, je stärker die Unterschiede zwischen den Blöcken sind. Dies kann in gewissem Maße durch geschickte Wahl der Blockgröße beeinflusst werden.

*Untergliederung von Population I
in 16 Blöcke Zufallsauswahl von $k = 3$ Probeflächen pro Block*

	I					II					III					IV					
1	<u>130</u>	153	153	112	200	106	100	147	<u>118</u>	165	-	-	12	-	35	-	18	-	-	24	A
2	124	<u>106</u>	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88	-	100	<u>30</u>	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	<u>147</u>	<u>165</u>	118	82	47	6	88	<u>12</u>	30	-	-	24	
4	165	112	124	<u>118</u>	153	118	224	136	118	159	<u>141</u>	65	<u>35</u>	24	-	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	<u>153</u>	88	53	71	-	-	94	47	30	
6	224	<u>247</u>	217	230	130	259	277	100	147	171	<u>200</u>	171	118	141	82	59	71	<u>6</u>	-	-	B
7	<u>253</u>	200	135	271	277	271	<u>230</u>	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	<u>212</u>	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	<u>183</u>	165	88	<u>106</u>	118	136	53	<u>71</u>	
9	224	283	247	300	100	<u>318</u>	277	306	177	200	<u>177</u>	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	<u>265</u>	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	<u>277</u>	330	253	218	177	353	330	253	171	<u>194</u>	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	<u>147</u>	183	<u>206</u>	<u>183</u>	130	88	59	130	<u>141</u>	112	106	94	
13	271	318	200	<u>271</u>	218	253	260	200	147	259	253	77	<u>165</u>	242	153	<u>194</u>	106	<u>224</u>	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	<u>130</u>	218	65	171	165	194	171	<u>206</u>	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	<u>124</u>	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	<u>71</u>	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	<u>88</u>	53	41	-	<u>18</u>	
18	130	200	194	<u>100</u>	141	165	<u>153</u>	147	177	194	<u>106</u>	35	-	18	-	-	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	<u>183</u>	118	124	124	94	159	71	-	100	18	6	6	-	-	-	30	
20	188	183	177	130	<u>94</u>	153	<u>47</u>	188	112	118	18	<u>18</u>	-	-	-	12	-	30	59	12	
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t

Formeln zur Blockstichprobe

Blockmittel

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}}{n_i}$$

n_i = Probeflächen pro Block

Gesamtmittel (\bar{x} ; \bar{x}_{Block})

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k}$$

k = Anzahl an Blöcken

Blockvarianz

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n_j - 1}$$

Gesamtvarianz (s^2 oder s_{Block}^2)

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^k s_j^2}{k}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n - k}$$

Gesamtstandardabweichung (S ; S_{Block})

$$s = \sqrt{s^2}$$

Stichprobenfehler $S_{\bar{x}}$; $S_{\bar{x}\text{Block}}$

$$S_{\bar{x}\text{Block}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

n = Umfang der Probefläche aller Blöcke

N = Umfang der Grundgesamtheit

Letzte Änderung: 25.06.1999
Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)



Biometrieübung 13

Stratifizierte Stichprobe

Formeln

Inhalt

[Quellenangabe und Beispielpopulation](#)

[Zufallsstichprobe](#)

[Formeln zur Zufallsstichprobe](#)

[Blockstichprobe \(Blockbildung\)](#)

[Formeln zur Blockstichprobe](#)

[Stratifizierte Stichprobe \(Stratifizierung\)](#)

[Formeln zur Stratifizierung](#)

[Systematische Stichprobe](#)

[Klumpenstichprobe / Clusterstichprobe](#)

[Mehrstufige Stichprobe](#)

[Zweistufige Stichprobe](#)

[Dreistufige Stichprobe](#)

Quellenangabe und Beispielpopulation

Die auf dieser Seite befindlichen Beispiele, Formeln und Beschreibungen wurden dem Buch "Forstinventur - Ein Leitfaden für Studium und Praxis" von FRITZ ZÖHRER (Verlag Paul Parey, Hamburg/Berlin 1980) entnommen. Für ein besseres Verständnis der unten aufgeführten Beispiele benutzen wir eine konkrete Übungspopulation. Die Population I besteht aus einem quadratischen Waldgebiet, das in $20 \times 20 = 400$ quadratische Probeflächen unterteilt ist, die sich ohne Zwischenräume aneinanderreihen. Jede Probefläche ist 0,1 ha groß, aber die Zahl in der Population gibt das Volumen in m^3/ha wieder. Die Bestockungsverhältnisse innerhalb dieses Gebietes sind ziemlich heterogen, wobei sich eine gewisse Zonierung zeigt.

Stratifizierte Stichprobe (Stratifizierung)

Stratifizierung (engl. "stratification") bedeutet Untergliederung einer Population in Teile, sog. Straten. Ein Stratum unterscheidet sich von einem anderen z.B. durch unterschiedlichen Waldtyp oder durch abweichendes Alter der Bestockung. In diesem Zusammenhang interessiert vor allem die Höhe des Holzvorrates pro ha und die Variabilität desselben.

Im Gegensatz zur Blockbildung ist die Stratifizierung, d.h. das Ziehen der Stratengrenzen willkürlich. Wichtig ist dabei lediglich, daß möglichst unterschiedliche Teilpopulationen entstehen. Zur Stratifizierung benutzt man meist Luftbilder, die etwaige Bestockungsunterschiede deutlich abbilden.

Die Stratifizierung gehört zu den wichtigsten Maßnahmen zur Erhöhung der Effizienz von forstlichen Stichprobenerhebungen.

In der Forstinventur wird die Stratifizierung vor allem dann angewandt, wenn das zu inventarisierende Waldgebiet aus deutlich unterschiedlich bestockten Teilgebieten zusammengesetzt ist. Je klarer sich diese Unterpopulationen voneinander abheben und je größer ihre zusammenhängende Flächenausdehnung ist, um so vorteilhafter ist die Stratifizierung.

Sind die Straten z.B. durch kleinflächige, mosaikartige zusammengesetzte Waldteile charakterisiert, kann der Aufwand für die Stratifizierung untragbar hoch sein. Dies ist z.B. bei Nationalinventuren in Mitteleuropa der Fall. Die wichtigste Grundlage für eine wirkungsvolle Stratifizierung ist aktuelles Luftbildmaterial für das Inventurgebiet. Auch eine bereits bestehende Forstkarte kann eine wertvolle Basis für stratifizierte Stichproben darstellen. Als Beispiel sei eine Altersklassenkarte der Forsteinrichtung genannt.

Der größte Vorteil der Stratifizierung neben der oft beträchtlichen Senkung der Inventurkosten ist die Untergliederung der Gesamtwaldfläche in sinnvolle Teilgebiete. Für diese Teilgebiete (Straten) sind häufig eigene Informationen erforderlich. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn die Straten Waldtypen darstellen, die eine unterschiedliche Baumartenzusammensetzung aufweisen.

Anstelle der zufälligen Verteilung innerhalb der Straten ist auch die systematische Verteilung sehr gebräuchlich.

Untergliederung von Population I in drei Volumenstraten,
Zufallsauswahl von $n_1 = 16$, $n_2 = 14$ und $n_3 = 18$ Probeflächen in den Straten I, II und III

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35	-	18	-	-	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88	-	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	-	-	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	-	-	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	-	-	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	-	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	-	18	-	-	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	-	100	18	6	6	-	-	-	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	-	-	-	12	-	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Stratum I Stratum II Stratum III

Formeln zur Stratifizierten Stichprobe

Proportionale Verteilung

$$n_j = \frac{N_j}{N} * n$$

Optimale Verteilung

$$n_j = \frac{N_j s_j}{\sum_{j=1}^K N_j s_j} * n$$

Stratenwerte:

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$$

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 / n_j}{n_j - 1}$$

Gesamtwerte:

L = 3 (Stratenanzahl)

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^L p_j \bar{x}_j$$

mit

$$p_j = \frac{N_j}{N}$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^L p_j s_j^2$$

Systematische Stichprobe

Die systematische Stichprobe (engl. "systematic sample") ist in vielen Fällen das bevorzugte Auswahlverfahren bei Forstinventuren.

Systematische Stichprobe bedeutet Auswahl nach einem starren, vorher festgelegten Schema, wie z.B. Schädlingskontrolle an jeder hundertsten Pflanze in einem Pflanzgarten, Befragung jedes tausendsten

Nationalparkbesuchers oder Aufnahme einer Winkelzählprobe alle 100 m in einem regelmäßigen Quadratnetz. Die Vorzüge der systematischen Stichprobe bei der Forstinventur liegen in der Einfachheit der Auswahl und in der größeren Effizienz gegenüber dem Zufallsprinzip.

Die systematische Verteilung ist effektiver als die zufällige Verteilung und erleichtert die praktische Durchführung der Feldarbeit. Es ist einfacher, entlang einer vorgegebenen Marschrichtung in bestimmten Abständen Probeflächen oder Winkelzählproben anzulegen, als nach einem ausgeklügelten System in einem schwer überschaubaren Waldgebiet Zufallspositionen aufzusuchen.

Bedenken gegenüber systematischen Stichproben, es sei mit verzerrten Mittelwerten zu rechnen und es sei nicht möglich, den Standardfehler zu quantifizieren, erwiesen sich nicht als so schwerwiegend, daß die Vorteile dadurch aufgewogen würden. Verzerrungen können bei wellenförmigen Trends durch geschickte Wahl der Richtung der Reihen vermieden werden. Leicht schräges Anschneiden der "Wellen" ist dabei am günstigsten. Außerdem kann in solchen Fällen das Dreiecksnetz vorteilhaft angewandt werden. Die Standardfehlerberechnung mit Paardifferenzen ist für praktische Zwecke der Forstinventur hinreichend genau. In vielen Fällen begnügt man sich auch mit der Zufallsformel und nimmt dabei eine Überschätzung des Standardfehlers in Kauf.

Systematische Stichprobe von n = 16 Probeflächen in Population I

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35	-	18	-	-	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88	-	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	-	-	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	-	-	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	-	-	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	-	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	-	18	-	-	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	-	100	18	6	6	-	-	-	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	-	-	-	12	-	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Klumpenstichprobe / Clusterstichprobe

Die Unzugänglichkeit der Waldgebiete, der hohe Zeit- und Kostenaufwand zum Erreichen der Stichprobenpositionen und die Aufwendigkeit der Messungen und Beobachtungen zwingen zu einer Konzentration der Feldarbeit. Die Auswahl von Probeflächen ist bereits eine derartige Konzentration. Die Aufnahmeeinheit besteht nicht mehr nur aus einem einzigen Element sondern aus mehreren.

Die Grundgesamtheit wird in Cluster (Klumpen) zerlegt und dazu erfolgt eine Auswahl einer bestimmten Anzahl Cluster.

Mehrstufige Stichprobe

Die mehrstufige Stichprobe (engl. "multi-stage sampling") spielt eine bedeutende Rolle in der Forstinventur. Die Grundidee ist, aus der Population primäre Stichprobeneinheiten auszuwählen, die wieder durch sekundäre Stichprobeneinheiten aufzunehmen sind. Man spricht in einem solchen Fall auch von Unterstichproben (engl. "sub-sampling").

Gibt es primäre und sekundäre Populationseinheiten, handelt es sich um eine zweistufige Stichprobe. Werden die sekundären Stichprobeneinheiten nicht voll aufgenommen, sondern wieder nur stichprobenmäßig erfaßt (durch tertiäre Stichprobeneinheiten), liegt eine dreistufige Stichprobe vor.

Zweistufige Stichprobe

Die zweistufige Stichprobe ist vor allem für großräumige Forstinventuren in Erwägung zu ziehen, wenn die hohen Kosten zum Erreichen der Stichprobenorte zu einer Konzentration der Feldarbeit zwingen, wie vor allem in tropischen Waldgebieten.

Das Verfahren muß mit der systematischen Stichprobe konkurrieren, bei der Satellitenprobeflächen oder sonstige systematisch angeordnete Cluster verwendet werden. Die zweistufige Stichprobe ist dann vorzuziehen, wenn die Gefahr wellenförmiger Trends besonders groß ist und bei der systematischen Stichprobe Verzerrungen erwartet werden müssen, die nicht eliminiert werden können.

Benutzt man anstelle der Zufallsauswahl innerhalb der primären Stichprobeneinheiten eine systematische Auswahl, geht das Verfahren in eine Clusterstichprobe über. Stichprobeneinheit ist dann wie bei der Satellitenstichprobe der ganze Cluster, d.h. die Summe aller Probeflächen eines Blocks. Diese Summe kann aber auch so behandelt werden, als ob sie aus einer einzigen größeren Probefläche stammen würde. Das Verfahren geht dann bei zufälliger Auswahl der primären Stichprobeneinheiten in die Zufallsstichprobe über.

Zweistufige Stichprobe in Population I

m = 6 Blöcke, n_j = 8 Probeflächen pro Block

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	-	-	12	-	35	-	18	-	-	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	-	12	65	88	-	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	-	-	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	-	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	-	-	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	-	-	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	

10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	C
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	-	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	-	18	-	-	35	30	41	35	D
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	-	100	18	6	6	-	-	-	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	-	-	-	12	-	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Dreistufige Stichprobe

Drei- und mehrstufige Stichproben spielen in der Praxis der Forstinventur kaum eine Rolle und sollen hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt werden. Bei der dreistufigen Stichprobe unterscheidet man zwischen primären, sekundären und tertiären hierarchisch angeordneten Populationseinheiten. Bei der Standardfehlerberechnung und bei der Optimierung sind alle drei Fehlerkomponenten zu berücksichtigen.

Letzte Änderung: 31.08.1999

Kontakt: [Wolfgang Stümer](#)

