Biometrieübung 3
Kombinatorik

Aufgabe

---

1. DNA

Eine lineare Anordnung von 3 DNA - Nukleotiden wird Triplet genannt. Ein Nukleotid kann eine der 4 möglichen Basen enthalten: Adenin (A). Cytosin (C), Guanin (G) und Thymin (T). Wie viele verschiedene Triplets können gebildet werden?

2. Familienfeier

Sie planen Ihren nächsten Geburtstag im Kreise Ihrer Familie zu feiern und laden 7 Personen zum Kaffee ein.

. Auf wie viele Arten können Sie die 7 Gäste um einen runden Tisch herum setzen?
b. Ihr Cousin Egmont erscheint zusammen mit seiner Lebensgefährtin Isabella. Da deren Beziehung auch kurzzeitige Trennungen nicht aushält, sollen beide zusammensitzen.
c. Tante Berta und Onkel Hugo haben sich wegen einer Erbschaftsangelegenheit zerstritten, so daß Sie beide nicht nebeneinander setzen können. Auf wie viele Arten können Sie nun die Gäste am Tisch plazieren?

3. Prüfung

Bei einer multiple-choice Aufgabe stehen Ihnen 10 mögliche Antworten zur Verfügung. Ein Kommilitone, der im Gegensatz zu Ihnen den Prüfungsstoff fleißig gelernt hat, signalisiert Ihnen, daß bei dieser Aufgabe sechs Antworten anzukreuzen sind. Auf wie viele Arten können die 6 Antworten aus den 10 Möglichkeiten ausgewählt werden?

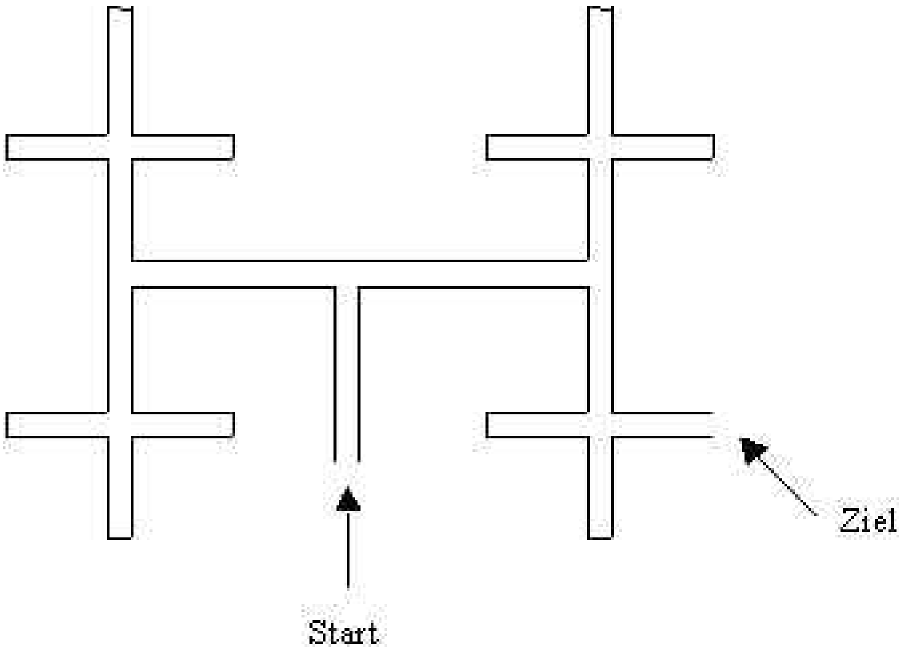
4. Wildwechsel

l Reh, l Hase, l Igel, l Hirsch, l Wildschwein und 1 streunender Hund wollen nacheinander einen Wildwechsel benutzen.

. Wieviel Permutationen sind möglich, wenn alle 6 Tiere den Wildwechsel passieren können?
b. Wieviel Variationen sind möglich, wenn nur 4 Tiere den Wildwechsel passieren können?
c. Wieviel Kombinationen sind möglich, wenn nur 4 Tiere den Wildwechsel passieren können?

5. Labyrinth

In einem Experiment zum Orientierungslernen müssen Ratten den richtigen Weg durch ein Labyrinth finden (siehe Abbildung). Das Labyrinth ist so konstruiert, daß sich die Ratten zunächst zwischen zwei Wegalternativen, dann wieder zwischen zwei Wegalternativen und zuletzt zwischen drei Wegalternativen entscheiden müssen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Ratte zufällig auf dem direktem Wege (d. h. ohne umzukehren) das Ziel erreicht?



6. Urne

In einer Urne befinden sich gut gemischt 4 rote, 3 blaue und 3 grüne Kugeln. Wir entnehmen der Urne zunächst 4 Kugeln, dann 3 Kugeln und zuletzt die verbleibenden 3 Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die 4 roten Kugeln zusammen, die 3 blauen Kugeln zusammen und die 3 grünen Kugeln zusammen der Urne entnommen werden?

7. Urne II

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln mit unterschiedlichem Gewicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugeln der Urne nacheinander in der Reihenfolge ihres Gewichtes (von der leichtesten bis zur schwersten Kugel) entnommen werden?

8. Lotto

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" 6 Richtige zu haben?

9. Skatspiel

Wieviel Möglichkeiten der Kartenverteilung gibt es beim Skatspiel?

10. Stammgäste

6 Stammgäste wollen den Wirt überreden, ihnen die Rechnung zu stunden, solange sie andere Sitzordnung einnehmen können. Sie treffen sich einmal in der Woche in der Gaststätte. Wie lange müßte der Wirt auf die Bezahlung warten und welche Summe schulden die Gäste am Ende dem Wirt, wenn das Essen pro Person durchschnittlich 15,- DM kostet?

Letzte Änderung: 18.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 3
Kombinatorik

Lösung

---

1. DNA

Kombination mit gleichen Elementen aber verschiedenen Anordnungen die berücksichtigt werden müssen => Variation.

Da das erste Nukleotid jede der Säuren sein kann, ebenso das zweite und das dritte Nukleotid ergibt sich eine Variation mit Wiederholungen (Wiederholungen sind zugelassen).

$$V_n^k = n^k$$

n = 4; k = 3

$$V_4^3 = 4^3 = 64$$

Für Anordnungen, bei denen keine Wiederholungen zugelassen sind, benutzt man die Formel für die Variation ohne Wiederholungen.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

n = 4; k = 3

$$V_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4*3*2*1}{1} = 24$$

2. Familienfeier

. gefragt ist die Reihenfolge, in der die Gäste um den Tisch sitzen können, nicht aber die konkrete Belegung der Stühle!
Eine Person wird irgendwohin gesetzt. Die restlichen 6 Personen können in 6! = 720 Arten um den Tisch gesetzt werden.
Bei konkreter Belegung der Stühle ergibt sich die Gesamtzahl der Möglichkeiten 7 Personen um den Tisch zu setzen von 7! = 5040.

b. Egmont und Isabella werden als eine Person betrachtet. Dann gibt es 6 Personen die in 5! Arten um den Tisch gesetzt werden können (bei konkreter Belegung der Stühle sind es 6 Personen die in 6! Arten plaziert werden können). Die beiden Personen, die als l Person betrachtet werden, können in 2! Arten angeordnet werden. (Isabella links oder rechts von Egmont) Folglich ergeben sich die Möglichkeiten 6 Personen um einen runden Tisch anzuordnen, wobei 2 Personen zusammensitzen von 5!2! = 240 (bei konkreter Belegung der Stühle von 6!2! = 1440).

c. Annahme: Problem Egmont und Isabella ist in diesem Fall nicht existent, dann folgt mit (a) und (b) die Gesamtzahl der Möglichkeiten, 6 Personen um den runden Tisch zu setzen, so daß 2 nicht zusammensitzen = 720 - 240 = 480 (bei konkreter Belegung der Stühle 5040 - 1440 = 3600)

3. Prüfung

Anordnung bleibt unberücksichtigt => Kombination (da egal ob erst z.B. 1 oder z.B. 9 angekreuzt wird)
6 verschiedene Antworten ohne Wiederholungen => Kombination ohne Wiederholungen

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

n = 10; k = 6

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!6!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1*6*5*4*3*2*1}$$

$$= \frac{10*9*8*7*6*5}{6*5*3*2*1} = \frac{5040}{24} = 210$$

4. Wildwechsel

. 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720

b. k = 4; n = 6

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

c. k = 4; n = 6

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

5. Labyrinth

richtiger Weg = 1
mögliche Wege = 2 * 2 * 3 = 12

P = 1 / 12 = 0,083

6. Urne

$$P_n^{(r,s,t)} = \frac{n!}{r!s!t!}$$

$$P_{10}^{(4,3,3)} = \frac{10!}{4!3!3!} = 4200$$

Da nur ein günstiger Fall angesprochen ist, ergibt sich mit P = 1 / 4200 = 2,38 * 10^{-4} eine ziemlich geringe Wahrscheinlichkeit für diese Aufteilung.

7. Urne II

Für die erste Kugelentnahme ergeben sich 6 Möglichkeiten, für die zweite 5, für die dritte 4 usw. bis hin zur letzten Kugel. Ingesamt sind so 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720 Abfolgen (Permutation) denkbar. Da nur eine Abfolge richtig ist, lautet die Wahrscheinlichkeit P = 1 / 720 = 0,0014.

8. Lotto

Im Lottospiel ermitteln wir als Anzahl der möglichen Fälle

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige lautet somit 1 / 13983816 = 7,15 * 10^{-8}.

9. Skatspiel

$$C_2^{32} \cdot C_{10}^{30} \cdot C_{10}^{20} \cdot C_{10}^{10} = 496 \cdot 30045015 \cdot 184756 \cdot 1 \approx 2,7 \cdot 10^{15}$$

10. Stammgäste

6! = 720 Wochen = ~ 13,8 Jahre
(1 Jahr hat ca. 52 Wochen)

6 * 15,- DM = 90,- DM (pro Woche) * 720 Wochen = 64800,- DM

Letzte Änderung: 18.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 3
Kombinatorik

Formeln

Inhalt

Permutation

Eine eindeutige Abbildung einer endlichen Menge [a_1, a_2, ..., a_n] auf sich selbst heißt Permutation.
Permutationen von *n* Elementen sind die Anordnung (Komplexionen) aller n Elemente in jeder möglichen Reihenfolge.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen.

$P_n = n!$

$n! = 1 * 2 * 3 * ... * n$

Anzahl der Permutationen von n Elementen mit Wiederholung.
Unter den n Elementen befinden sich je r, s, t, ... gleiche Elemente.

$$P_n^{(r,s,t)} = \frac{n!}{r!s!t!}$$

Kombination mit Berücksichtigung der Anordnung (Variationen)

Anordnungen, die aus n gegebenen Elementen nur eine bestimmte Anzahl k in allen möglichen Reihenfolgen enthalten, heißen Variationen.

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung.
Jedes Element kommt in einer Variation nur einmal vor.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung.
Jedes Element kann in einer Variation mehrfach vorkommen.

$$V_n^k = n^k$$

Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung (Kombinationen)

Werden jeweils k Elemente aus der Gesamtzahl n ausgewählt und in beliebiger, aber nur jeweils einer Reihenfolge angeordnet, entstehen Kombinationen.

Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung.
Jede Kombination darf dasselbe Element nur einmal enthalten.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse, mit Wiederholung.
Jede Kombination darf dasselbe Element mehrfach enthalten.

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Letzte Änderung: 18.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*